b) pour x>0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$=\frac{(1+x^2)-1}{x^2\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}=\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}=f_d'(0)$$

c) T:$y=\frac{1}{2}x$ ; $x\geq 0$

pour x>0

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\frac{1}{2}x=\frac{2\sqrt{1+x^2}-(2+x^2)}{2x}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2(1+x^2)-(2+x^2)^2}{2x\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{-x^3}{2\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}\leq 0$$

$(\zeta_f)$ est au dessous de (T)

d) pour x>0

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x-(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

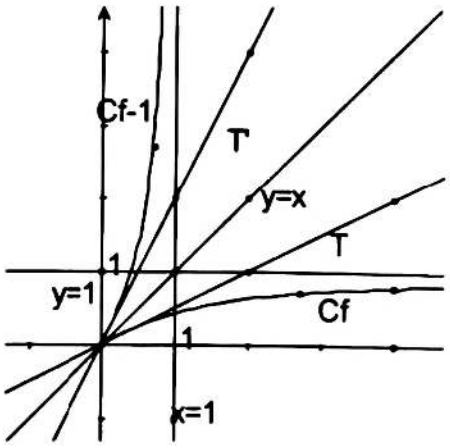
$$f'(x)=\frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0 \quad \text{car } 1+x^2>1$$

| x | 0 | +∞ |
|---|---|---|
| f '(x) | + | |
| f(x) | 0 ↗ | 1 |

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$$

e) y=1 est une asymptote à $(\zeta_f)$ au voisinage (+∞)




2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

*elle* réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur J

J=f($\mathbb{R}_+$) = $[0,1[$

b) on pose : $y=f^{-1}(x)$ $x\in]0,1[$ , $y\in\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y}=x\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=xy+1$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2=x^2y^2+2xy+1\Leftrightarrow y\left[(1-x^2)y-2x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y=2x \text{ car } y\neq 0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{pour } x=0\rightarrow y=0$$

d'où $f^{-1}(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ ; $\forall x\in[0,1[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ:y=x

**partie B :**

$g(x)=f(x)$ pour $x\in[0,1]$

$$\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$$

1) a) * pour n=0 ,on a : $0\leq U_0\leq 1$ (vrai)

* supposons que : $0\leq U_n\leq 1$

* montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq 1$

$0\leq U_n\leq 1\Rightarrow g(0)<g(U_n)\leq g(1)$

*car* g est strictement croissante sur $[0,1]$

*d'où* $0<U_{n+1}\leq\sqrt{2}-1\leq 1$

*conclusion* : $0\leq U_n\leq 1$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn